Karakteristik Değerler ve Karakteristik Vektörler

<u>Tanım:</u> $A=[a_{ij}]\in F^n_n$ ve

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n,\quad a_i\in F$$

polinomu verilsin.

$$f(A)=a_0A^0+a_1A+\dots+a_nA^n,\quad A^0=I_n$$

lineer dönüşümüne A nın bir polinomu denir.

<u>Örnek:</u> $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ olsun. $f(x)=2x^3-4x+5$ için

$f(A)$ matrisi $f(A)=2A^3-4A+5=\begin{bmatrix}-13 & 52\\ 104 & -117\end{bmatrix}$ dir.

<u>Örnek:</u> $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ matrisinin $f(x)=x^2+2x-11$ polinomunun bir sıfırı old. göst.

<u>Tanım</u> $A:V\to V$ lineer dön. verilsin. $\alpha\in V$ için $A(\alpha)=\lambda\alpha$ o şek. bir $\alpha\neq 0$ vektörü varsa $\lambda\in F$ ye A nın bir karakteristik değeri, $\alpha\in V$ ye de bu λ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör denir.

($\alpha=0$ için $A(0)=0=\lambda 0$ olup herzaman sağlanır. Bu nedenle $\alpha\neq 0$ alınır.)

<u>Teorem:</u> $A:V\to V$ lineer dön. de herbir $\alpha\neq 0$ vektörüne bir tek λ karakteristik değeri karşılık gelir.

<u>İspat:</u> $A(\alpha)=\lambda_1\alpha$ ve $A(\alpha)=\lambda_2\alpha$ olsun.

$(\lambda_1-\lambda_2)\alpha=0$ $\quad\alpha\neq 0$ olduğundan $\lambda_1=\lambda_2$ dir.

Scanned by CamScanner

Örnek: V, F cismi üz. de bir vektör uzayı olsun. $c \in F$ için

$$cI : V \longrightarrow V$$
$$\alpha \longrightarrow (cI)(\alpha) = cI(\alpha) = c\alpha$$

bir lineer dön. dür.

$A = cI$ alalım. $\forall \alpha \in V$ için $A(\alpha) = (cI)(\alpha) = c\alpha$ olduğundan $\forall \alpha \in V$, cI için bir karakteristik vektördür. Bu karakteristik vektör $c \in F$ ye karşılık gelir. Yani teo. tersi doğru değildir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_2^2$ matrisine karşılık gelen lineer dönüşümün karakteristik değer ve karakteristik vektörlerini bulunuz.

$$A(\alpha) = \lambda\alpha \ , \ \alpha = (x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + 7x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + (7-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Bu homojen lineer denk. sisteminin $(x_1, x_2) \neq 0$ çözümünün olması için

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ olmalı.}$$

$$(3-\lambda)(7-\lambda) - 10 = 0$$

$\underline{\lambda_1 = 5 - \sqrt{14}}$, $\underline{\lambda_2 = 5 + \sqrt{14}}$ karakteristik değerler.

Scanned by CamScanner

λ_1 e karşılık gelen kar. vektör için,

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 5 \\ 2 & 7-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (3-\lambda_1)x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + (7-\lambda_1)x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (\sqrt{14}-2)x_1 + 5x_2 = 0 \\ \underbrace{2x_1 + (2+\sqrt{14})x_2 = 0} \end{cases}$$

$x_1 = c_1$ için $x_2 = -\frac{2}{2+\sqrt{14}}c_1$ olur.

$$\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{2+\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

$c_1 = 1$ için $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -2/\sqrt{14}+2 \end{bmatrix}$ olur.

Benzer şekilde $\lambda_2 = 5+\sqrt{14}$ e karşılık gelen kar. vekt.

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ \frac{-2c_2}{2-\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$ olur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisine karşılık gelen $A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümünün karakteristik değer ve kar. vekt.

$A(\alpha) = \lambda\alpha$ dan $\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - (1+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

olup kar. vektörler $\alpha_1 = \alpha_2 = (c_1, c_2) = c_1(1,1)$

$c_1 = 1$ için $\alpha_1 = \alpha_2 = (1,1)$ olur.

Scanned by CamScanner

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ için aynı soru.

$A(\alpha)=\lambda\alpha \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Big\} \; 1+\lambda^2=0$

olup $\lambda \notin \mathbb{R}$ olacağından kar. değeri yoktur. Kar vekt. de yok.

Tanım (Karakteristik uzay): V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n-boy. vektör uzayı olsun. Bir $A: V \longrightarrow V$ lineer dönüşümünün $\lambda \in \mathcal{F}$ karakteristik değerine karşılık gelen bütün karakteristik vektörlerin cümlesi V_λ ile gösterilir.

$$V_\lambda = \{\alpha \in V \mid A(\alpha)=\lambda\alpha \,,\, \alpha \neq 0\}$$

$V_\lambda \subset V$ alt uzayına $\lambda \in \mathcal{F}$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik uzay denir.

Karakteristik Polinom ve Karakteristik Denklem

Tanım: $(V, \mathcal{F}, n)$ olsun. $A: V \longrightarrow V$ lineer dön. olsun. A lineer dönüşümünün matrisi $A \in \mathcal{F}_n^n$ olmak üz.

$$P_A(x)=\det(xI_n - A)$$

polinomuna A lineer dönüşümünün ya da A matrisinin karakteristik polinomu denir. $P_A(x)=0$ denklemine de A nın karakteristik denklemi denir.

Teorem: $A: V \to V$ lineer dönüşümünün herbir karakteristik değeri $P_A(x)$ polinomunun bir kökü ve tersine $P_A(x)$ in $\mathcal{F}$ deki herbir kökü A nın bir karakteristik değeridir.

Scanned by CamScanner

<u>İspat:</u> $\lambda \in F$, $A: V \to V$ lineer dönüşümünün karakteristik değeri olsun.

$A(\alpha)=\lambda\alpha$ olacak $\alpha \neq 0$ vardır.

$A(\alpha)=\lambda I(\alpha)$

$A(\alpha)-(\lambda I)(\alpha)=0 \quad \to \quad (A-\lambda I)(\alpha)=0$

Bu son denklem $\alpha=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nin x_i bilinmeyenlerine göre homojen denklemdir. Bu denklemin $\alpha \neq 0$ çözümünün olması için

$$\underbrace{\det(\lambda I_n - A)}_{P_A(x)} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$\Rightarrow \lambda$, $P_A(x)$ in köküdür.

Tersine; $P_A(x)$ in bir kökü $\lambda \in F$ olsun.

$P_A(\lambda)=0 \Rightarrow \det(\lambda I_n - A)=0$

$\Rightarrow (\lambda I_n - A)(\alpha)=0$ denkleminin $\alpha \neq 0$ çözümleri vardır. $\Rightarrow A(\alpha)=\lambda\alpha$

$\Rightarrow \lambda$, α ya karşılık gelen kar. değerdir.

Teorem (Cayley-Hamilton):

Her matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür.

<u>Örnek:</u> $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2_2$ matrisine karşılık gelen lin dön karakteristik değer ve vektörlerini bulalım.

Karakteristik polinom $P_A(\lambda)=\det(\lambda I_2 - A)=0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -5 \\ -2 & \lambda-7 \end{bmatrix}$

$\det(\lambda I_2 - A)=(\lambda-3)(\lambda-7)-10=0$

Scanned by CamScanner